1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 22 juin 2017

Version 6 juin 2017

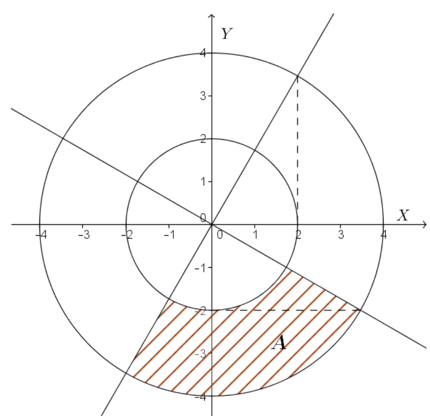
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + i \text{ arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
   (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
   (b) Simplifier au maximum l'expression $D_x f + i\ D_y f$.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \cos^2(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$
   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

3. • On donne
$$A = [0, +\infty[\times [1,2] \quad \text{et} \quad f(x,y) = e^{-xy}.$$
   (a) La fonction f est-elle intégrable sur A ? Si oui, calculer son intégrale sur cet ensemble.
   (b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\ dx.$$
   • Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \ \text{ et } \ x \in [0,y]\}$.
   (a) Représenter B.
   (b) Si g est intégrable sur B, écrire son intégrale en intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y et vice-versa.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$. Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



5. Soient les matrices A, B et X données par
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B.
   b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
   c) Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec B ? Justifier.
   d) Montrer $\boxed{\textbf{directement}}$ que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.

6. Les séries suivantes sont-elles convergentes ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme

$$(a) \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^j \qquad (b) \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right).$$

7. Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.
   - Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
   - S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
   - Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.

   (i) Déterminer la matrice de transition.
   (ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + i\ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.**

   (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.

   Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0,\ \sqrt{x^2+y^2} > 0,\ x \neq 0\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}.$$

   (b) Simplifier au maximum l'expression $D_x f + i\ D_y f$.

   Solution. La fonction f peut s'écrire sous la forme $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et en un point de A, on a

$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= \frac{1}{2} D_t \ln(t)|_{t=x^2+y^2} \ .\ D_x(x^2+y^2) + i D_t \mathrm{arctg}(t)|_{t=y/x} \ .\ D_x\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ .\ \frac{1}{x^2+y^2}\ .\ 2x + i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\ .\ \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} D_y f(x,y) &= \frac{1}{2} D_t \ln(t)|_{t=x^2+y^2} \ .\ D_y(x^2+y^2) + i D_t \mathrm{arctg}(t)|_{t=y/x} \ .\ D_y\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ .\ \frac{1}{x^2+y^2}\ .\ 2y + i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\ .\ \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y+ix}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

   Dès lors, on a

$$D_x f(x,y) + i D_y f(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + \frac{iy+i^2x}{x^2+y^2} = 0.$$

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \cos^2(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1, 2 et 3 en 0.

   Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

   $Df(x) = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x),\ D^2f(x) = -2\cos(2x),\ D^3f(x) = 4\sin(2x)$ et $D^4f(x) = 8\cos(2x)$.

   Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = 0,\ \ D^2f(0) = -2$ et $\ D^3f(0) = 0$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1, \quad P_2(x) = P_3(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

   Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1, u_2, u_3 compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = -2\cos(2u_1).\frac{x^2}{2!} = -\cos(2u_1)x^2, \quad R_2(x) = 4\sin(2u_2).\frac{x^3}{3!} = \frac{2\sin(2u_2)\,x^3}{3}$$

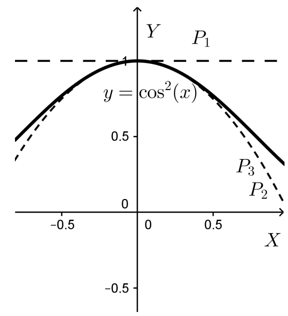
et

$$R_3(x) = 8\cos(2u_3)\frac{x^4}{4!} = \cos(2u_3)\frac{x^4}{3}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution.

Lorsque x est au voisinage de 0, on a $R_1(x) \leq 0$ tandis que $R_2(x)$ et $R_3(x)$ sont positifs. Dès lors, le graphique de la fonction est situé en dessous de celui de P_1 et au-dessus de celui de $P_2 = P_3$.



3. • **On donne**

$$A = [0, +\infty[\times [1, 2] \quad \textbf{et} \quad f(x, y) = e^{-xy}.$$

(a) La fonction f est-elle intégrable sur A ? Si oui, calculer son intégrale sur cet ensemble.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto e^{-xy}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A ensemble fermé non borné. Etudions son intégrabilité sur A en considérant l'intégrale

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx \right) dy.$$

Pour y fixé dans $[1, 2]$, la fonction $g : x \mapsto e^{-xy}$ est continue sur $[0, +\infty[$ ensemble fermé non borné. Etudions l'intégrabilité de g en $+\infty$ et pour cela calculons, pour tout $t > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-xy}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{y}\, e^{-xy} \right]_0^t = -\frac{1}{y} \lim_{t\to+\infty} \left(e^{-yt} - 1 \right) = \frac{1}{y}$$

car, par application de la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{t\to+\infty} (-yt) = -\infty$ puisque $y \in [1, 2]$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$.
Comme cette limite est finie, g est intégrable sur $[0, +\infty[$ et son intégrale vaut $\frac{1}{y}$.

La fonction $h : y \mapsto \frac{1}{y}$ est continue sur le fermé borné $[1, 2]$ donc y est intégrable. Dès lors, f est intégrable sur A et on a

$$I = \int_1^2 \frac{1}{y}\, dy = [\ln(y)]_1^2 = \ln(2)$$

puisque $\ln(1) = 0$.

(b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$$

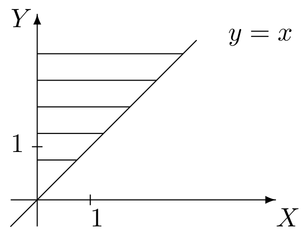
Solution. Comme f est intégrable sur A, on peut permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale ; on a donc

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_1^2 e^{-xy}\, dy \right) dx.$$

Or,
$$\int_1^2 e^{-xy}\ dy = \left[-\frac{1}{x}e^{-xy}\right]_1^2 = \frac{1}{x}\left(e^{-x}-e^{-2x}\right).$$
Dès lors, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\ dx$ est $\ln(2)$.

• **Soit** $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0 \ \ \textbf{et} \ \ x\in[0,y]\}$**.**
(a) Représenter B**.**

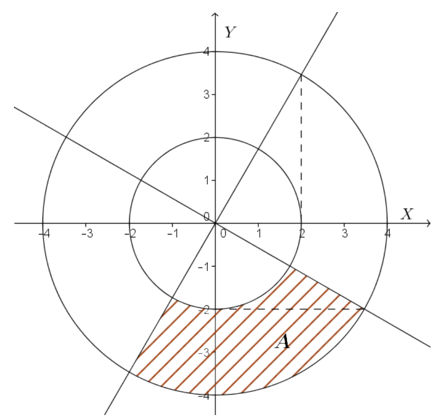
Solution. La partie hachurée du plan représente les points de B, les points des bords étant compris dans l'ensemble.



(b) Si g **est intégrable sur** B**, écrire son intégrale en intégrant d'abord par rapport à** x **puis par rapport à** y **et vice-versa.**

Solution. Comme
$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,+\infty[,\ x\in[0,y]\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,+\infty[,\ y\in[x,+\infty[\}$$
et comme g est intégrable sur B, on a
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^y g(x,y)\ dx\right)\ dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} g(x,y)\ dy\right)\ dx.$$

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction** $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$**. Si c'est possible, calculer**
$$I=\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



La fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2+y^2}{y^2}$ est continue sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Les abscisses et ordonnées des points d'intersection des cercles avec les droites intervenant dans les bords de A permettent de conclure que ces droites ont pour équation cartésienne $y=\sqrt{3}\,x$ ou encore $y=\operatorname{tg}(4\pi/3)x$ et $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x$ ou encore $y=\operatorname{tg}(11\pi/6)x$. Ainsi, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est
$$A'=\left\{(r,\theta) : r\in[2,4],\ \theta\in\left[\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right]\right\}.$$
La fonction à intégrer est la fonction
$$g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))=\frac{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}=\frac{r^2}{r^2\sin^2(\theta)}=\frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \left(\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{r}{\sin^2(\theta)} \, d\theta \right) dr &= \int_2^4 r \, dr \, . \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2(\theta)} \, d\theta \\
&= \left[\frac{r^2}{2} \right]_2^4 . \left[-\operatorname{cotg}(\theta) \right]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \\
&= \left(\frac{16-4}{2} \right) \left(\operatorname{cotg}\left(\frac{4\pi}{3} \right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{11\pi}{6} \right) \right) \\
&= 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right) \\
&= \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. **Soient les matrices A, B et X données par**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si c'est possible, déterminer la matrice inverse de B.

Solution. La matrice B est inversible si et seulement si $\det B \neq 0$. Comme $\det B = -4$, la matrice B est donc inversible.

La matrice des cofacteurs de B étant égale à

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

l'inverse de B est la matrice

$$B^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$. La matrice B possède donc deux valeurs propres simples, -2 et 2 ; elle est donc diagonalisable.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B+2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$(B-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc des vecteurs du type

$$c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c' est une constante complexe non nulle.

Dès lors, la matrice inversible $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec B ? Justifier.

Solution. Comme B est une matrice de dimension 2, toute matrice qui commute avec B est aussi de dimension 2.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a,\ b,\ c$ et $d \in \mathbb{C}$. On a

$$BM = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 2a \\ 2d & 2c \end{pmatrix}.$$

Dès lors, $BM = MB \Leftrightarrow b = c$ et $a = d$ et on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et $b \in \mathbb{C}$.

d) Montrer $\boxed{\text{directement}}$ que X est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.

Solution. Par définition, X, vecteur non nul, est un vecteur propre de A de valeur propre λ_0 si $AX = \lambda_0 X$. Comme

$$AX = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

X est bien un vecteur propre de A de valeur propre -2.

6. **Les séries suivantes sont-elles convergentes ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme**

$$(a) \sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^j \qquad (b) \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right).$$

Solution. (a) Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la série peut s'écrire $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^j$. C'est une série géométrique convergente puisque sa raison $\frac{-\sqrt{2}}{2} \in]-1,1[$. Ainsi, la somme de cette série vaut

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^j = \frac{-\sqrt{2}}{2}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^j = \frac{-\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2}+1.$$

(b) Considérons la somme partielle $\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$. Celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m+1} = \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} - \sum_{m=2}^{M+1}\frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{M+1}.$$

Dès lors, la série est convergente car en passant à la limite, on a

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \lim_{M\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{M+1}\right) = 1$$

et la somme de la série vaut 1.

7. **Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.**
- Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
- S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
- Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
(i) Déterminer la matrice de transition.

Solution. Soient B_0, J_0 et N_0 respectivement le type de sport (basket, jogging, natation) choisi pour une semaine fixée au départ et B_1, J_1 et N_1 respectivement le type de sport choisi la semaine suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ J_1 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ J_0 \\ N_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) **Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.**

Solution. Puisque T est une matrice régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(T-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & -1 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 3y + 2z = 0 \\ 9x - 12y + 4z = 0 \\ 3x + 6y - 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 12y = -4z \\ 3x + 6y = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 12y = -4z \\ 6x + 12y = 16z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4z}{5} \\ y = \frac{14z}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}z \\ \frac{14}{15}z \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(12+14+15)=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{41}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{41} \\ \frac{14}{41} \\ \frac{15}{41} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'un étudiant fasse du jogging à long terme est de $14/41$.